Théorème de Bernstein pour les séries entières

Référence : Gourdon, Analyse p.251

Théorème :
Soit $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[, f^{2k}(x) \geq 0$$

Alors, f est développable en série entière.

Preuve :

Il suffit de montrer que pour tout $b \in]-a,a[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-b,b[$. On fixe $b \in]0,a[$.

Étape 1 :
Soit $F(x) = f(x) + f(-x)$. La fonction F est paire, donc pour tout $k \in \mathbb{N}, F^{(2k+1)}(0) = 0$.
On applique la formule de Taylor avec reste intégral à F en 0 :
$\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,b[$:

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0) + R_n(x) \tag{1}$$

où $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}.F^{(2n+2)}(t)dt$
On remarque que $F^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geq 0$ par hypothèse. Donc $0 \leq R_n(b) \leq F(b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ [1]

De plus,

$$0 \leq R_n(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1}.\frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt. \tag{2}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{x-t}{b-t}$ est décroissante sur $[0,x]$ donc $(\dfrac{x-t}{b-t})^{2n+1} \leq (\dfrac{x}{b})^{2n+1} < 1$

Ainsi, $0 \leq R_n(x) \leq (\dfrac{x}{b})^{2n+1}R_n(b)$ (en remplacant dans (2)) $\leq (\dfrac{x}{b})^{2n+1}F(b) \to 0$ car $(\frac{x}{b} < 1)$
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$
Cela s'écrit :

$$\forall x \in [0,b[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$$

La fonction F étant paire, le résultat est vrai sur $]-b,b[$

1. Si on applique (1) en $x = b$, on a $F(b)$ qui est égale a des quantités posotives (les dérivées en 0) + $R_n(b)$. Cela implique bien que $0 \leq R_n(b) \leq F(b)$

Étape 2 : On généralise à f.
Soit $x \in]-b,b[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f(0) + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(0) + r_n(x)$$

où $r_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} . f^{(2n+2)}(t)dt$.
Comme $0 \leq f^{(2n+2)}(x) \leq F^{(2n+2)}(x)$ alors, $|r_n(x)| \leq Rn(|x|)$, et par encadrement :
$\lim\limits_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$.

Ainsi, en notant : $\forall p \in \mathbb{N}, S_p(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$, on vient de montrer que :
$\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$.
Or :
$S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \dfrac{1}{2} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0)$. C'est le terme gńéral d'une série convergente donc il $\to 0$ quand $n \to +\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n}(x) = f(x)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x)$ ce qui termine la preuve.